

УДК 550.34.01

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ О МОМЕНТЕ ИМПУЛЬСА ОКЕАНА ЗА ПЕРИОД 01.01.1980–27.03.2003 гг.

© 2012 г. И.Я. Цуркис<sup>1</sup>, М.С. Кучай<sup>2</sup><sup>1</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия<sup>2</sup>Геофизическая служба РАН, г. Москва, Россия

Использован подход, основанный на вычислении спектра Винера – Лиувилля двухмерного сигнала. Проанализированы временные ряды возмущающих функций океана, полученные Международной службой вращения Земли за период с 01.01.1980 г. по 27.03.2003 г. (*IERS*, <http://www.iers.org>). Показано, что возмущение, действующее на твердую Землю со стороны океана, можно интерпретировать как стационарный анизотропный случайный процесс с характерным временем автокорреляции  $\tau_{\text{cor}} < 100$  сут. Получена оценка доли чандлеровского движения полюса (ЧДП), обусловленной этим воздействием. Дано сравнение вкладов атмосферы и океана в возбуждение ЧДП.

**Ключевые слова:** движение полюса, скалярное произведение, спектр Винера – Лиувилля, анизотропный марковский процесс, константа анизотропии.

Вероятностный подход к описанию чандлеровского движения полюса (ЧДП), предложенный А.Н. Колмогоровым [*Арато, Колмогоров, Синай, 1962*], трактует ЧДП как случайную составляющую движения полюса. В рамках этого подхода предполагается, что момент сил, вызывающий ЧДП, является белым шумом – стационарным процессом с малым временем корреляции  $\tau_{\text{cor}}$ , а чандлеровское движение, представляющее собой решение уравнения Лиувилля, – двумерной марковской последовательностью (марковским процессом с дискретным временем; шаг дискретизации  $\Delta \gg \tau_{\text{cor}}$ ).

Результаты, представленные в работах [*Цуркис, Спиридонов, 2009; Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012*], подтверждают адекватность такой модели. В первой из них проанализированы данные о положении полюса, во второй – ряды возмущающих функций атмосферы, которая, по мнению большинства авторов (см., например, [*Barnes et al., 1983; Gross, 2000; Gross, Fukumori, Menemenlis, 2003*]), вносит существенный вклад в возбуждение ЧДП. Однако оказывается, что коэффициент диффузии атмосферной составляющей движения полюса примерно на порядок меньше суммарного коэффициента, характеризующего движение полюса в целом. Это говорит о том, что помимо атмосферного, существуют иные, не менее эффективные механизмы возбуждения ЧДП.

В настоящей работе, посвященной вероятностному анализу воздействия океана, авторы используют результаты, полученные ими ранее [*Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012*].

### Ряды возмущающих функций. Основная статистическая гипотеза для момента, действующего со стороны океана

Возмущающие функции океана  $\chi_k(t)$  ( $k=1, 2$ ) определяются теми же соотношениями, что и возмущающие функции атмосферы [*Barnes et al., 1983; Gross, Fukumori, Menemenlis, 2003*]:

$$\chi_1 = \frac{1}{\Omega(C-A)} (h_1 + \Omega J_{31}), \quad \chi_2 = \frac{1}{\Omega(C-A)} (h_2 + \Omega J_{32}), \quad (1)$$

где  $\Omega=2\pi/\text{сут}$  – частота суточного вращения Земли;  $C=7.04 \cdot 10^{37}$  кг·м<sup>2</sup> – аксиальный момент инерции Земли;  $A=7.04 \cdot 10^{37}$  кг·м<sup>2</sup> – экваториальный момент инерции Земли;  $h_1, h_2$  – экваториальные компоненты момента импульса океана;  $J_{31}, J_{32}$  – компоненты тензора инерции океана. Методика вычисления величин  $\chi_k$  по формулам (1) подробно описана в статье [Gross, Fukumori, Menemenlis, 2003].

Данные IERS представляют собой временные ряды возмущающих функций  $\chi_k$  и относятся к прямоугольной системе координат, в которой оси  $x_1$  и  $x_2$  лежат в экваториальной плоскости; ось  $x_1$  при этом направлена вдоль проекции гринвичского меридиана на эту плоскость. Через возмущающие функции и их производные по времени могут быть выражены экваториальные составляющие  $M_1$  и  $M_2$  момента силы, который действует на твердую Землю со стороны океана:

$$M_1 = \omega C (\Omega \chi_2 - \dot{\chi}_1), \quad M_2 = \omega C (\Omega \chi_1 + \dot{\chi}_2), \quad (2)$$

где  $\omega$  – частота свободной прецессии Земли (чандлеровская частота), составляющая примерно  $0.0145 \text{ сут}^{-1}$ .

Движение полюса Земли описывается уравнением Лиувилля, выражающим закон сохранения момента импульса для двухосного самогравитирующего вязкоупругого вращающегося эллипсоида [Манк, Макдональд, 1964]. Линеаризованный вариант этого уравнения представляет собой систему

$$\dot{x}_1 + \frac{1}{2Q} \dot{x}_2 + \omega x_2 = f_1, \quad \dot{x}_2 - \frac{1}{2Q} \dot{x}_1 - \omega x_1 = f_2. \quad (3)$$

Здесь  $x_1$  и  $x_2$  – безразмерные координаты полюса;  $Q$  – добротность, безразмерная константа, характеризующая интенсивность диссипации на частотах порядка  $\omega$  (по современным оценкам  $50 \leq Q \leq 500$ );  $f_1$  и  $f_2$  – функции, известным образом связанные с моментом внешних сил, в данном случае с угловым моментом океана:

$$f_k = M_k / \Omega C \quad (k = 1, 2). \quad (4)$$

Из (2) и (4) следует, что

$$f_1 = \omega \left( \chi_2 - \frac{\dot{\chi}_1}{\Omega} \right), \quad f_2 = \omega \left( -\chi_1 - \frac{\dot{\chi}_2}{\Omega} \right). \quad (5)$$

Пусть возмущение, описываемое функциями  $\chi_k$  ( $k=1, 2$ ), носит случайный характер. Тогда случайными являются и функции  $f_k$ , вычисляемые по формулам (5). Назовем регулярными составляющими  $f_k^{reg}$  функций  $f_k$  математические ожидания  $f_k^{reg} = Mf_k$ , а случайными составляющими – величины  $f_k^{ran} = f_k - f_k^{reg}$ , средние значения которых равны нулю. В дальнейшем под  $f_k$  будем подразумевать случайные составляющие  $f_k^{ran}$  этих функций. Относительно регулярных компонент  $f_k^{reg}$  предположим, что их зависимость от времени можно свести к конечной сумме гармоник:

$$f_k^{reg} = \sum_m c_m^{(k)} \cos \sigma_m t + d_m^{(k)} \sin \sigma_m t. \quad (6)$$

Двумерную величину  $f_1(t), f_2(t)$  будем называть случайной нагрузкой. Основная гипотеза состоит в том, что величины  $f_k$  нормально распределены и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} M(f_1(t_1)f_1(t_2)) &= F_{11} \delta(t_2 - t_1), & M(f_2(t_1)f_2(t_2)) &= F_{22} \delta(t_2 - t_1), \\ M(f_1(t_1)f_2(t_2)) &= F_{12} \delta(t_2 - t_1), \end{aligned} \quad (7)$$

т.е. пара  $f_1(t), f_2(t)$  представляет собой двумерный белый шум. В выражениях (7)  $F_{11}, F_{22}, F_{12}$  – постоянные величины,  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака. Как и ранее [Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012], мы не предполагаем, что этот шум является изотропным, т.е., вообще говоря,  $F_{12} \neq 0, F_{11} \neq F_{22}$ .

Назовем симметричную неотрицательную матрицу  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \quad (8)$$

матрицей диффузии. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  собственные числа этой матрицы; будем считать, что  $F_1 \geq F_2$ . Отношение  $F_2 / F_1$  может меняться от 0, когда матрица диффузии вырождена, до 1, когда она изотропна (пропорциональна единичной). Величину  $\kappa = 1 - F_2 / F_1$  будем называть константой анизотропии.

Под интенсивностью случайной нагрузки  $a$  будем понимать след матрицы  $\mathbf{F}$ :

$$a = F_1 + F_2 = F_{11} + F_{22}.$$

Эта величина – самая важная характеристика случайной нагрузки: при шаге дискретизации  $\Delta \gg 1/\omega$  и добротности  $Q \gg 1$  решение уравнения (3) можно трактовать как изотропный марковский процесс с коэффициентом диффузии, равным  $a$  независимо от того, чему равно отношение  $F_2 / F_1$  [Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012].

Основная цель данной работы – проверка гипотезы (7). Если предположения этой гипотезы справедливы, решение системы (3) при любом значении добротности – нормальный марковский процесс; в частности, это верно при отсутствии диссипации, когда

$$Q = \infty. \quad (9)$$

По реализации этого процесса можно оценить константы  $a$  и  $\kappa$ .

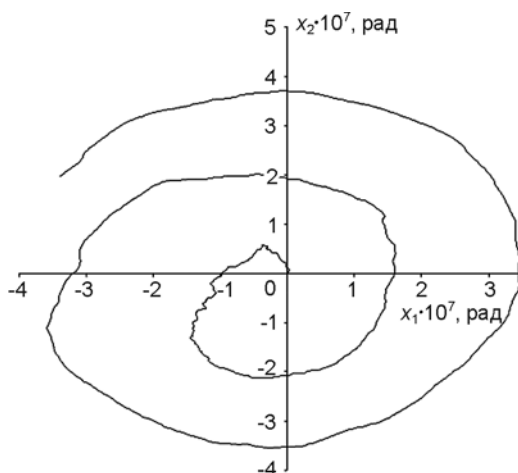
Если основная гипотеза верна, эти оценки, начиная с некоторого значения шага дискретизации  $\Delta_0$ , не должны зависеть от него. При этом получить оценки легче всего в случае (9), так как приращения процесса без диссипации за интервалы времени  $[t_1, t_2]$  и  $[t_3, t_4]$ , где  $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ , статистически независимы.

Решение системы (3) можно выразить через возмущающие функции  $\chi_k(t)$  ( $k=1, 2$ ). В отсутствие диссипации

$$x_1 = -\frac{\omega}{\Omega}(\chi_1(t) - \chi_1(0)\cos\omega t + \chi_2(0)\sin\omega t) + z \left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \int_0^t (\chi_2 \cos\omega(t-\tau) + \chi_1 \sin\omega(t-\tau)) d\tau, \quad (10)$$

$$x_2 = -\frac{\omega}{\Omega}(\chi_2(t) - \chi_2(0)\cos\omega t - \chi_1(0)\sin\omega t) + \omega \left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\right) \int_0^t (\chi_2 \sin\omega(t-\tau) - \chi_1 \cos\omega(t-\tau)) d\tau;$$

в нашем случае момент времени  $t=0$  соответствует 01.01.1980 г. Океанической компонентой движения полюса будем называть решение уравнения Лиувилля (10), которое представляет собой раскручивающуюся против часовой стрелки спираль (рис. 1).



**Рис. 1.** Океаническая компонента движения полюса. Результат вычислений по формулам (10) за 1000 сут; момент времени  $t=0$  соответствует 01.01.1980 г.

Дальнейшее рассмотрение удобно вести в терминах комплексных функций. Пусть функция  $z(t)$  имеет вид

$$z(t) = x_1(t) + i x_2(t), \quad (11)$$

где  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  вычислены по формулам (10). Случайную составляющую функции  $z - x = z - Mz$  обозначим  $x(t)$  и будем называть ее океанической компонентой (или составляющей) чандлеровского движения полюса. Согласно нашему предположению, функция  $x(t)$  представляет собой нормально распределенный комплексный марковский процесс без диссипации, а именно решение уравнения

$$\dot{x} - i\omega x = f, \quad (12)$$

где  $f = f_1 + if_2$  – комплексный (не обязательно изотропный) белый шум.

Пусть  $\Delta$  – шаг дискретизации. Положим  $x_n = x(n\Delta)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , где  $N = T / \Delta$ .

Условное среднее  $M(x_n | x_{n-1})$  равно  $M(x_n | x_{n-1}) = e^{i\omega\Delta} x_{n-1}$ , поэтому комплексные величины

$$\zeta_n = x_n - e^{i\omega\Delta} x_{n-1} \quad (13)$$

имеют нулевое математическое ожидание; кроме того, они не коррелируют.

Математическое ожидание случайной величины  $|\zeta_n|^2$  равно  $M|\zeta_n|^2 = a\Delta$ , и, следовательно, оценка

$$a = \sum_{1 \leq n \leq N} |\zeta_n|^2 / (N\Delta) \quad (14)$$

является состоятельной и несмещенной; при  $N \gg 1$  закон распределения этой величины близок к нормальному. С другой стороны, формула (14) является оценкой дляращения условной дисперсии процесса  $x(t)$  за единицу времени, в связи с чем величину  $a$  можно назвать коэффициентом диффузии океанической составляющей ЧДП.

### Скалярное произведение и спектр Винера – Лиувилля. Связь с нормой Соболева и преобразованием Фурье

Оценить коэффициент диффузии (след матрицы диффузии  $F$ ) можно с помощью формулы (14), но прежде необходимо исключить из океанической компоненты движения полюса (10) регулярную составляющую. В статье [Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012] предложен вариант гармонического анализа, который, по-видимому, наилучшим образом подходит для этой цели: его использование делает процедуру разделения марковского процесса (решения стохастического уравнения Лиувилля) и детерминированного сигнала математически вполне корректной. Кроме того, “новый” спектр (так называемый спектр Винера – Лиувилля) функции  $z(t)$  в отличие от спектра Фурье не содержит максимума, отвечающего решению однородного уравнения, что дает возможность определить, присутствует ли в возмущающих функциях близчандлеровская мода. Но важнее всего то, что “модифицированный” спектральный анализ марковского сигнала приводит к независимой оценке величины  $a = \text{Tr}F$ .

Спектр Винера – Лиувилля естественно определить в терминах скалярного произведения Винера – Лиувилля:

$$\langle z, w \rangle = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} (z((n+1)\Delta) - e^{i\omega\Delta} z(n\Delta)) (\overline{w((n+1)\Delta) - e^{-i\omega\Delta} \overline{w(n\Delta)}}), \quad (15)$$

где  $\omega$  – чандлеровская частота;  $T = N\Delta$  – длина ряда наблюдений,  $z(t)$ ,  $w(t)$  – комплексные функции времени; чертой обозначено комплексное сопряжение. Используя определение (15), оценку (14) можно переписать в виде “скалярного квадрата”:

$$a = \langle x, x \rangle. \quad (16)$$

*Замечание 1.* Элементами пространства, в котором определено скалярное произведение (15), являются функции, заданные в точке  $N+1$ . Однако размерность этого пространства равна  $N$ , так как форма (15) отождествляет функции, разность между которыми пропорциональна чандлеровской гармонике  $\exp\{i\omega t\}$ . Если производная  $z$  интегрируема с квадратом, то  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \langle z, z \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left| \frac{d}{dt} (e^{-i\omega t} z) \right|^2 dt$ . При  $\omega=0$  интеграл в правой части этой формулы представляет собой квадрат нормы Соболева функции  $z(t)$ . Таким образом, скалярное произведение (15) можно считать дискретным аналогом нормы Соболева.

Основное свойство билинейной формы (15) состоит в следующем. Пусть  $x(t)$  – решение стохастического уравнения (12),  $w(t)$  – произвольная детерминированная функция. Тогда скалярное произведение  $\langle x, w \rangle$  – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием  $M\langle x, w \rangle$  и дисперсией  $D\langle x, w \rangle$ :

$$M\langle x, w \rangle = 0, \quad D\langle x, w \rangle = M |\langle x, w \rangle|^2 = \frac{a\Delta}{T} \langle w, w \rangle. \quad (17)$$

Из (17) следует, что если скалярный квадрат  $\langle w, w \rangle$  ограничен как функция длины  $T$  ряда наблюдений, то при  $T \rightarrow \infty$  скалярное произведение  $\langle x, w \rangle \rightarrow 0$ , т.е. на больших временах марковский процесс и произвольная детерминированная функция ортогональны в смысле скалярного произведения (15).

Перейдем к определению спектра Винера – Лиувилля, вычислив предварительно “скалярный квадрат” гармоники  $e^{i\sigma t}$  и резонансного решения уравнения (12) – функции  $te^{i\omega t}$ :

$$\langle e^{i\sigma t}, e^{i\sigma t} \rangle = \frac{4}{\Delta} \sin^2 \frac{(\sigma - \omega)\Delta}{2}, \quad \langle te^{i\omega t}, te^{i\omega t} \rangle = \Delta -$$

и введя в рассмотрение нормированную гармонику  $h_\sigma$ :

$$\langle h_\sigma, h_\sigma \rangle = 1. \quad (18)$$

Если  $\sigma \neq \omega + 2\pi k / \Delta$  при  $k = 0, \pm 1, \dots$ , то

$$h_\sigma = h(\sigma, t) = e^{i\sigma t} / \sqrt{\langle e^{i\sigma t}, e^{i\sigma t} \rangle} = \frac{e^{i\sigma t} \sqrt{\Delta}}{2 |\sin((\sigma - \omega)\Delta / 2)|}. \quad (19)$$

Под  $h_\omega$  будем понимать нормированную функцию, пропорциональную резонансу  $te^{i\omega t}$ :

$$h_\omega = \frac{te^{i\omega t}}{\sqrt{\langle te^{i\omega t}, te^{i\omega t} \rangle}} = \frac{t}{\sqrt{\Delta}} e^{i\omega t}.$$

Спектром Винера – Лиувилля функции  $z(t)$  назовем комплексную величину

$$Z(\sigma) = \sqrt{\frac{T}{\Delta}} \langle z, h_\sigma \rangle, \quad \sigma \in [-\pi/\Delta, \pi/\Delta]. \quad (20)$$

Заметим, что определенный таким образом спектр имеет период  $2\pi/\Delta$  и непрерывен всюду, кроме частот вида  $\sigma = \omega + 2\pi k/\Delta$ , в которых фаза функции  $Z(\sigma)$  скачком меняется на  $\pi$ , амплитудный спектр  $|Z(\sigma)|$  – всюду непрерывная периодическая функция.

Приведем формулу, показывающую связь между спектрами Фурье и Винера – Лиувилля. Пусть производная  $z$  непрерывна. Тогда в пределе при  $\Delta \rightarrow 0$

$$\sqrt{T} \lim_{\Delta \rightarrow 0} Z(\sigma) = |\omega - \sigma| Z_F(\sigma) + i \frac{\omega - \sigma}{|\omega - \sigma|} (z(T) \exp(-i\sigma T) - z(0)),$$

где  $Z_F(\sigma) = \int_0^T z(t) \exp(-i\sigma t) dt$  – компонента Фурье.

При заданном  $Z_F(\sigma)$  функцию  $z(t)$  можно вычислить по формуле обратного преобразования Фурье. В “модифицированном” спектральном анализе формула обращения

имеет вид  $z(t) \sim \frac{\sqrt{T\Delta}}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} Z(\sigma + \omega) h_{\sigma+\omega} d\sigma$  и позволяет восстановить оригинал  $z(t)$  в точках  $t=n\Delta$  ( $n=0, 1, \dots, N$ ) с точностью до слагаемого, пропорционального чандлеровской гармонике  $\exp\{i\omega t\}$ .

Заметим, что аналогом тождества Парсевала в данном случае является формула

$$\langle z, z \rangle = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} |Z|^2 d\sigma. \quad (21)$$

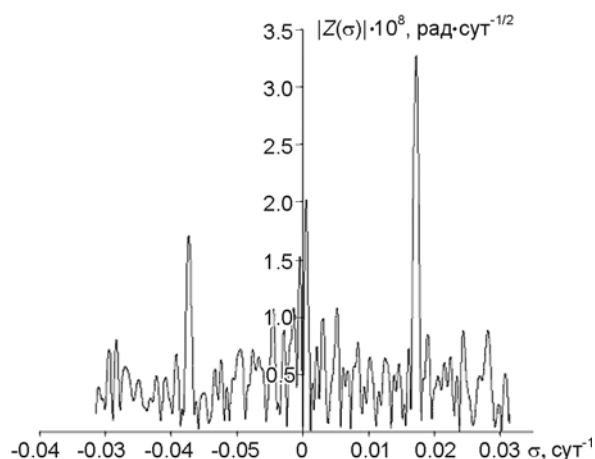
### Случайная составляющая океанической компоненты движения полюса

Наша ближайшая цель – найти детерминированную составляющую океанической компоненты движения полюса и вычесть ее из функции  $z(t)$ . Из предположения (6) и линейности уравнения Лиувилля следует, что искомая составляющая представляет собой линейную комбинацию гармоник, для определения частот которых построим спектр Винера – Лиувилля океанической компоненты движения полюса.

На рис. 2 показан амплитудный спектр  $|Z(\sigma)|$  функции (11), рассчитанный при шаге  $\Delta=100$  сут. Заметим, что функция  $|Z(\sigma)|$  не содержит максимума на чандлеровской частоте  $\omega \approx 0.0145$  сут<sup>-1</sup>, поскольку, во-первых, “собственная составляющая” движения полюса (вращение с угловой скоростью  $\omega$ ) не дает вклада в спектр Винера – Лиувилля, так как гармоника  $e^{i\omega t}$  – ядро квадратичной формы (15)  $\langle e^{i\omega t}, z \rangle \equiv 0$ . Во-вторых, в нагрузке нет выделенной гармоники с частотой  $\omega$ ; в противном случае функция (11) содержала бы детерминированную резонансную моду  $\sim te^{i\omega t}$ , и такой максимум имел бы место.

Низкочастотный максимум в спектре  $|Z(\sigma)|$  присутствует, но, в отличие от случая атмосферной компоненты, не является доминирующим, что объясняется исключением из временных рядов *IERS* средних значений возмущающих функций океана (см. сайт <http://www.iers.org>). Детальный анализ показывает, что низкочастотный максимум расщеплен на два пика с частотами  $\sigma_1 = 5.3 \cdot 10^{-4}$  сут<sup>-1</sup> и  $\sigma_2 = -4.3 \cdot 10^{-4}$  сут<sup>-1</sup>.

Регулярная часть функции  $z(t)$  содержит также годовую составляющую – пики в амплитудном спектре на частотах  $\sigma_3 = 0.0172$  сут<sup>-1</sup> и  $\sigma_4 = -0.0172$  сут<sup>-1</sup> (см. рис. 2). Ее обертонам – модам с частотами  $\sigma_5 = 2\sigma_3$  и  $\sigma_6 = 2\sigma_4$  – отвечают слабые максимумы функции  $|Z(\sigma)|$  на частотах 0.028 и  $-0.028$  сут<sup>-1</sup> (спектр Винера – Лиувилля отождествляет частоты, различающиеся на целое число “периодов по частоте”  $2\pi/\Delta$ ). Таким образом, в случае океанической составляющей движения полюса число детерминированных гармоник  $q$  равно шести.



**Рис. 2.** Амплитудный спектр Винера – Лиувилля океанической компоненты движения полюса при шаге  $\Delta=100$  сут

В статье [Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012] описана процедура исключения детерминированных гармоник из атмосферной компоненты, представляющая собой “вариацию на тему метода наименьших квадратов”. Эта процедура корректна в том смысле, что случайная погрешность  $\delta a$ , которую она привносит в значение коэффициента диффузии, стремится к нулю при  $T \rightarrow \infty$ . Однако приведенные в названной статье оценки математического ожидания и дисперсии величины  $\delta a$  относятся к ситуации, когда регулярные моды “почти ортогональны” в смысле скалярного произведения (15). Океаническая компонента ЧДП не удовлетворяет этому условию, поскольку содержит моды с близкими частотами  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Скалярное произведение соответствующих этим частотам нормированных гармоник, вообще говоря, не является малой величиной –  $|\langle h(\sigma_1), h(\sigma_2) \rangle| \approx 0.2$ , чем и определяется необходимость уточнения полученных оценок.

Проще, однако, с самого начала перейти от гармоник  $h_m = h(\sigma_m)$  ( $m=1, \dots, 6$ ) к их линейным комбинациям, ортогональным (и нормированным) относительно квадратичной формы (15). Это можно сделать с помощью стандартной процедуры построения ортонормированного базиса (см., например, [Колмогоров, Фомин, 1976]). Приведем результат, соответствующий случаю  $T=8120$  сут,  $\Delta=100$  сут:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= h_1; \quad \tilde{h}_2 = (-0.130 + 0.121i)h_1 + 1.016h_2; \quad \tilde{h}_3 = 0.015i h_1 + (-0.006 + 0.006i)h_2 + h_3; \\ \tilde{h}_4 &= (0.003 + 0.001i)h_1 + (0.006 + 0.013i)h_2 + (0.004 - 0.011i)h_3 + h_4; \\ \tilde{h}_5 &= (-0.006 + 0.007i)h_1 + (-0.007 - 0.005i)h_3 + (-0.005 + 0.022i)h_4 + h_5; \\ \tilde{h}_6 &= -0.004h_1 + (0.006 - 0.003i)h_2 + (-0.005 - 0.022i)h_3 + \\ &\quad + (-0.008 + 0.005i)h_4 + (0.021 + 0.019i)h_5 + h_6, \end{aligned}$$

где  $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_6$  – искомым ортонормированный базис

$$\langle \tilde{h}_m, \tilde{h}_j \rangle = 0, \quad m \neq j; \quad \langle \tilde{h}_j, \tilde{h}_j \rangle = 1. \quad (22)$$

Как и следовало ожидать, при  $m \neq 2$  функции  $\tilde{h}_m$  почти не отличаются от гармоник  $h_m$ .

Пусть  $x(t)$  – случайная (марковская) составляющая океанической компоненты движения полюса:

$$x = z - \sum_{m=1}^q \mu_m \tilde{h}_m, \quad (23)$$

где  $\mu_m$  – подлежащие определению комплексные коэффициенты. Скалярно умножим (23) на функцию  $\tilde{h}_j$ . Пользуясь (22), получим  $\mu_j = \langle z, \tilde{h}_j \rangle - \langle x, \tilde{h}_j \rangle$ . В силу основного свойства формы Винера – Лиувилля (см. (17), второе слагаемое в правой части последнего равенства представляет собой случайную величину порядка  $\sqrt{\Delta/T}$ , отбросив которую, получаем

$$\mu_j \approx \langle z, \tilde{h}_j \rangle. \quad (24)$$

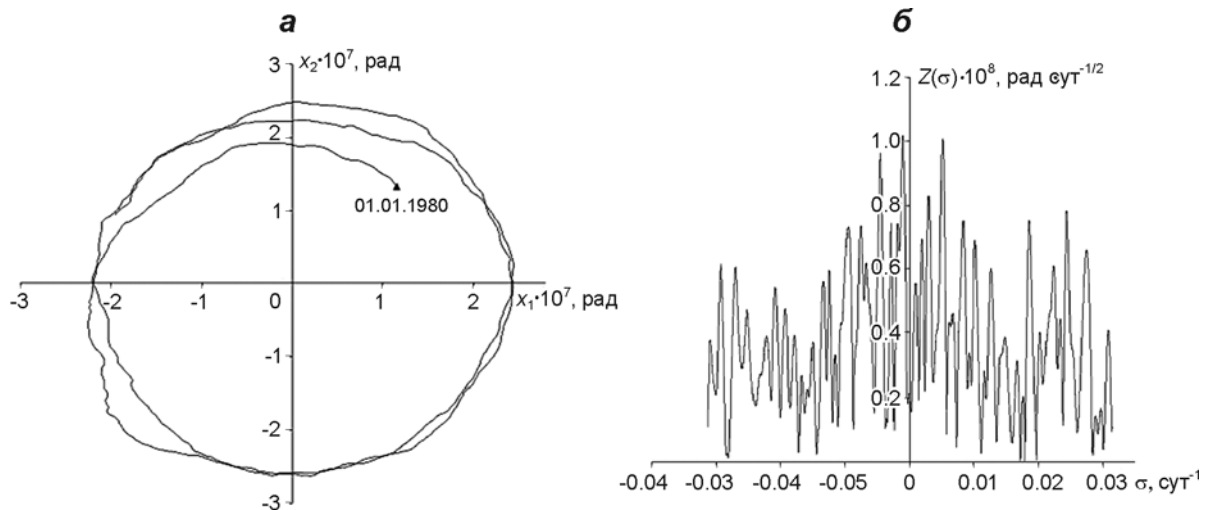
Из (23) и (24) имеем:

$$x = z - \sum_{m=1}^q \langle z, \tilde{h}_m \rangle \tilde{h}_m. \quad (25)$$

Результат вычислений по формуле (25) при значении шага  $\Delta=100$  сут показан на рис. 3,а; амплитудный спектр  $|X(\sigma)|$  функции  $x(t)$ , вычисленный при том же значении  $\Delta$ , приведен на рис. 3,б. Амплитудный спектр, как можно видеть, не содержит явно выраженных максимумов.

Формулы (24) для коэффициентов  $\mu_m$  содержат случайную ошибку  $\delta\mu_m$ , которая, очевидно, равна  $\delta\mu_m = \langle x, \tilde{h}_m \rangle$ . Тем самым, погрешность, которую дает формула (25), составляет

$$\delta x = - \sum \delta\mu_m \tilde{h}_m = - \sum \langle x, \tilde{h}_m \rangle \tilde{h}_m. \quad (26)$$



**Рис. 3.** Океаническая составляющая ЧДП за 1000 сут, начиная с 01.01.1980 г., при  $\Delta=100$  сут (а) и ее амплитудный спектр Винера – Лиувилля (б)

Эта погрешность, в свою очередь, приведет к ошибке при вычислении коэффициента диффузии  $a$  – главной характеристики случайной нагрузки.

Оценить коэффициент диффузии  $a$  проще всего с помощью формулы (14) или, что то же самое, формулы (16); при этом фактически мы будем вычислять величину  $a' = a + \delta a = \langle x + \delta x, x + \delta x \rangle$ .

Воспользуемся тем, что форма  $\langle *, * \rangle$  линейна по каждому аргументу:

$$\langle x + \delta x, x + \delta x \rangle = \langle x, x \rangle + \langle \delta x, x \rangle + \langle x, \delta x \rangle + \langle \delta x, \delta x \rangle.$$

Но из (26) и (22) следует, что  $\langle \delta x, x \rangle = \langle x, \delta x \rangle = -\sum | \langle x, \tilde{h}_m \rangle |^2$ ;  $\langle \delta x, \delta x \rangle = \sum | \langle x, \tilde{h}_m \rangle |^2$ , поэтому

$$a' = \langle x, x \rangle - \sum_{m=1}^q | \langle x, \tilde{h}_m \rangle |^2. \tag{27}$$

Таким образом, ошибка  $\delta a$  равна:

$$\delta a = -\sum_{m=1}^q | \langle x, \tilde{h}_m \rangle |^2. \tag{28}$$

Математическое ожидание этой ошибки можно вычислить с помощью второго из соотношений (17):

$$M \delta a = -q a / N, \tag{29}$$

где  $q$  – число регулярных гармоник,  $N = T / \Delta$ .

Итак, описанная процедура приводит к систематическому занижению коэффициента диффузии. В рассматриваемом случае  $q=6$ ; при  $N = 81$  получим  $M \delta a \approx -0.07 a$ .

*Замечание 2.* Если число “лишних” гармоник равно  $N$ , из соотношения (29) имеем  $M \delta a = -a$ . Из (28) и (27) следует, что в этом случае  $a' = 0$ , т.е., исключив детерминированную составляющую, мы получим ноль или чандлеровскую гармонику. Этот вывод согласуется с геометрическим смыслом преобразования (25), которое переводит мерное пространство  $N$  (см. Замечание 1) в подпространство, ортогональное функциям  $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_q$ ; ясно, что в случае  $q=N$  это подпространство будет нулевым.

Дисперсия величины  $a' = a + \delta a$ , как и ее математическое ожидание, может быть вычислена точно. В силу (27),



$$Da' = Da - 2 \sum_{m=1}^q K(\langle x, x \rangle, |\langle x, \tilde{h}_m \rangle|^2) + \sum_{j=1}^q \sum_{m=1}^q K(|\langle x, \tilde{h}_j \rangle|^2, |\langle x, \tilde{h}_m \rangle|^2), \quad (30)$$

где  $K(x, y)$  – корреляция между величинами  $x$  и  $y$ .

Дисперсия  $Da$  вычислена в работе [Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012] как

$$Da = \frac{1}{N} (a^2 + b^2 \sin^2 \omega \Delta / (\omega \Delta)^2). \quad (31)$$

Для нахождения двух других слагаемых в правой части (30) нам понадобятся два корреляционных тождества:

$$K(\langle x, x \rangle, |\langle x, u \rangle|^2) = \frac{\langle u, u \rangle}{N^2} (a^2 + b^2 \sin^2 \omega \Delta / (\omega \Delta)^2) \quad (32)$$

и

$$K(|\langle x, u \rangle|^2, |\langle x, w \rangle|^2) = \frac{1}{N^2} ((a |\langle u, w \rangle|)^2 + (b |[u, w]| \sin \omega \Delta / (\omega \Delta))^2). \quad (33)$$

В этих формулах  $x$  – решение стохастического уравнения (12);  $b$  – разность собственных чисел матрицы диффузии;  $u$  и  $w$  – детерминированные функции; через  $[*,*]$  обозначена билинейная форма

$$[u, w] = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} (u((n+1)\Delta) - e^{i\omega\Delta} u(n\Delta))(w((n+1)\Delta) - e^{i\omega\Delta} w(n\Delta)). \quad (34)$$

Доказательство формул (32) и (33) состоит в нахождении математических ожиданий конечных сумм. При этом используется тот факт, что приращения (13) не коррелируют, и применяются формула (17) и соотношения

$$|M\zeta_n^2| = b |\sin \omega \Delta| / \omega \quad \text{и} \quad M|\zeta_n|^4 = (2a^2 \Delta^2 + b^2 \sin^2 \omega \Delta / \omega^2).$$

(Полное доказательство нами не приводится, см. [Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012].)

Из (30)–(33) имеем

$$Da' = a^2 \left( \frac{1}{N} - \frac{q}{N^2} \right) + b^2 \frac{\sin^2 \omega \Delta}{\omega^2 \Delta^2} \left( \frac{1}{N} - \frac{2q}{N^2} + \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^q \sum_{m=1}^q |[\tilde{h}_j, \tilde{h}_m]|^2 \right). \quad (35)$$

Подсчитать двойную сумму, фигурирующую в правой части (35), не составляет труда, поскольку функции  $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_q$  являются линейными комбинациями нормированных гармоник  $h(\sigma_m)$ , а величину  $[h(\sigma_m), h(\sigma_j)]$  можно вычислить с помощью формулы

$$[h(\sigma), h(\lambda)] = \frac{1}{4N} \frac{(\exp i\sigma\Delta - \exp i\omega\Delta)(\exp i\lambda\Delta - \exp i\omega\Delta) \exp i(\sigma + \lambda)T - 1}{|\sin \frac{\sigma - \omega}{2} \Delta \sin \frac{\lambda - \omega}{2} \Delta| \exp i(\sigma + \lambda)\Delta - 1},$$

являющейся следствием (34) и (19). При  $\Delta=100$  сут мы получим  $\sum_{j=1}^6 \sum_{m=1}^6 |[\tilde{h}_j, \tilde{h}_m]|^2 \approx 5.91$  и

$Da' = D(a + \delta a) = 0.011a^2 + 0.005b^2$ . Дисперсия ошибки, обусловленной конечностью ряда наблюдений в силу (31), равна  $Da = 0.012a^2 + 0.006b^2$ .

Таким образом, исключение “лишних” гармоник уменьшает и математическое ожидание, и дисперсию оценки (16). Однако этими эффектами ввиду их малости можно пренебречь – при значении параметра  $\Delta=100$  сут  $\frac{Ma'}{Ma} = 0.93$ ;  $0.94 < \sqrt{\frac{Da'}{Da}} < 0.96$ .

*Замечание 3.* При  $q=N$  построенный алгоритм приводит к значению “коэффициента диффузии”  $a' \equiv 0$  (см. *Замечание 2*); т.е. дисперсия  $Da'$  должна быть равна нулю. Отсюда и

из (35) заключаем, что  $\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N |[\tilde{h}_j, \tilde{h}_m]|^2 = N$ , где  $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_N$  – полная ортонормированная система функций. Этот факт может быть доказан и чисто алгебраически.

### Проверка основной гипотезы. Доверительные интервалы для коэффициента диффузии и параметров, характеризующих анизотропию случайной нагрузки

Основная гипотеза состоит в том, что момент сил, действующих со стороны океана на твердую Землю, представляет собой стационарный случайный процесс с малым временем корреляции – двумерный белый шум (см. корреляционные соотношения (7)). Проверить эту гипотезу можно, оценив по формуле (16) при разных значениях шага дискретизации  $\Delta$  основной параметр, характеризующий случайную нагрузку, – коэффициент диффузии  $a$ . Если, начиная с какого-то значения шага  $\Delta = \Delta_0$ , эта оценка слабо зависит от величины  $\Delta$ , при  $\Delta \geq \Delta_0$  последовательность  $x(n\Delta)$  можно интерпретировать как марковскую и считать, что функции  $f_k$  ( $k = 1, 2$ ) – стационарные случайные функции с характерным временем автокорреляции  $\tau_{\text{cor}} \ll \Delta_0$  (см. [Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012]).

В данной работе мы обобщим этот подход, имея в виду оценку константы анизотропии  $\kappa$  и угла  $\varphi$  между собственными векторами матрицы диффузии  $\mathbf{F}$  и ортами системы координат, в которой даны значения возмущающих функций; далее величину  $\varphi$  мы будем называть углом поворота.

Будем придерживаться следующего плана. Прежде всего, для оценки элементов матрицы диффузии  $\mathbf{F}$  получим формулы, аналогичные (16); затем, учитывая статистическую связь между этими оценками, построим отвечающую вероятности  $P$  трехмерную “доверительную область”  $\Phi_P$  для матрицы  $\mathbf{F} \equiv (F_{11}, F_{12}, F_{22})$ . Наконец, вычислим экстремальные значения функций  $a(\mathbf{F})$ ,  $\kappa(\mathbf{F})$  и  $\varphi(\mathbf{F})$  на множестве  $\Phi_P$ , которые и будут искомыми границами доверительных интервалов. Идея, таким образом, состоит в том, чтобы рассматривать матрицу  $\mathbf{F}$  как единый трехмерный объект.

Приступая к реализации этого плана, рассмотрим уравнение

$$\dot{x} - i\omega x = uf + v \bar{f}, \quad (36)$$

где  $u, v$  – комплексные коэффициенты;  $f$  – двумерный белый шум, фигурирующий в правой части (12). Пусть  $x_{u,v}(t)$  – общее решение уравнения (36); обозначение  $x(t)$  сохраним для решения уравнения (12), которое очевидно является частным случаем (36). Выразим  $x_{u,v}$  через  $x$ :

$$x_{u,v}(t) = u x(t) + v \int_0^t \bar{f}(\tau) \exp i\omega(t - \tau) d\tau; \quad (37)$$

слагаемое, пропорциональное  $\exp i\omega t$ , мы опускаем. Из (12) следует, что

$$\bar{f} = \bar{\dot{x}} + i\omega \bar{x}. \quad (38)$$

Подставив (38) в (37) и проинтегрировав по частям, получим искомую формулу для  $x_{u,v}$ :

$$x_{u,v} = u x(t) + v \left( \bar{x}(t) + 2i\omega \int_0^t \bar{x}(\tau) \exp i\omega(t - \tau) d\tau \right). \quad (39)$$

Правую часть в (36) обозначим далее через  $f^{(u,v)} = uf + v \bar{f}$ , а соответствующую матрицу диффузии с коэффициентами  $F_{kl}^{(u,v)}$  через  $\mathbf{F}^{(u,v)}$ :

$$M(f_k^{(u,v)}(t) \cdot f_l^{(u,v)}(\tau)) = F_{kl}^{(u,v)} \delta(t - \tau), \quad (k, l = 1, 2),$$

где  $f_1^{(u,v)} = \text{Re } f^{(u,v)}$ ;  $f_2^{(u,v)} = \text{Im } f^{(u,v)}$ .

Выпишем элементы матрицы  $\mathbf{F}^{(u,v)}$  в явном виде:

$$\begin{aligned}
F_{11}^{(u,v)} &= (u_1 + v_1)^2 F_{11} - 2(u_1 + v_1)(u_2 - v_2)F_{12} + (u_2 - v_2)^2 F_{22}; \\
F_{12}^{(u,v)} &= (u_1 + v_1)(u_2 + v_2)F_{11} + \left( (u_1^2 + v_2^2) - (u_2^2 - v_1^2) \right) F_{12} - (u_1 - v_1)(u_2 - v_2)F_{22}; \\
F_{22}^{(u,v)} &= (u_2 + v_2)^2 F_{11} + 2(u_2 + v_2)(u_1 - v_1)F_{12} + (u_1 - v_1)^2 F_{22};
\end{aligned} \quad (40)$$

здесь

$$u_1 = \operatorname{Re} u, \quad u_2 = \operatorname{Im} u; \quad v_1 = \operatorname{Re} v, \quad v_2 = \operatorname{Im} v. \quad (41)$$

Если гипотеза (7) верна, величину  $a_{u,v} = F_{11}^{(u,v)} + F_{22}^{(u,v)}$  можно оценить с помощью формулы

$$a_{u,v} \approx \langle x_{u,v}, x_{u,v} \rangle, \quad (42)$$

которая аналогична (16) (функцию  $x_{u,v}(t)$  мы считаем известной, так как она элементарно вычисляется по формуле (39)).

Дисперсия оценки (42) равна

$$D\langle x_{u,v}, x_{u,v} \rangle = \frac{\Delta}{T} (a_{u,v}^2 + b_{u,v}^2 \sin^2 \omega \Delta / \omega^2 \Delta^2) \quad (43)$$

где  $b_{u,v}$  – разность собственных чисел матрицы  $\mathbf{F}^{(u,v)}$  (см. формулу (31)).

Из (41) и (40) следует, что при  $u = v = 1/2$  матрица  $\mathbf{F}^{(u,v)}$  равна

$$\mathbf{F}^{(1/2,1/2)} = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и мы имеем несмещенную оценку  $\Psi_1$  для величины  $F_{11}$ :

$$\Psi_1 = \langle x_{1/2,1/2}, x_{1/2,1/2} \rangle; \quad M\Psi_1 = F_{11} \quad (44)$$

с дисперсией

$$D\Psi_1 = \gamma F_{11}^2, \quad (45)$$

где, как это следует из (43),

$$\gamma = \frac{\Delta}{T} \left( 1 + \frac{\sin^2 \omega \Delta}{\omega^2 \Delta^2} \right). \quad (46)$$

Оценку  $\Psi_2$  для элемента  $F_{22}$ , задав  $u=1/2, v=-1/2$ , получим в виде

$$\Psi_2 = \langle x_{1/2,-1/2}, x_{1/2,-1/2} \rangle; \quad M\Psi_2 = F_{22}; \quad (47)$$

дисперсия  $D\Psi_2$  равна:

$$D\Psi_2 = \gamma F_{22}^2. \quad (48)$$

Наконец, рассмотрим случаи, когда  $u = 1, v = i$  и когда  $u = i, v = 1$ . Из (41) и (40) имеем  $F_{11}^{(1,i)} = F_{22}^{(1,i)} = F_{12}^{(1,i)} = F_{11} + 2F_{12} + F_{22}; F_{11}^{(i,1)} = F_{22}^{(i,1)} = F_{12}^{(i,1)} = F_{11} - 2F_{12} + F_{22}$  и  $a_{1,i} - a_{i,1} = 8F_{12}$ . Следовательно, величина  $\Psi_3$ , имеющая вид

$$\Psi_3 = \frac{1}{8} (\langle x_{1,i}, x_{1,i} \rangle - \langle x_{i,1}, x_{i,1} \rangle), \quad (49)$$

является несмещенной оценкой для элемента  $F_{12}$ . Эта оценка состоятельна, так как дисперсия обеих величин в скобках стремится к нулю при  $T/\Delta \rightarrow \infty$ . Точное значение дисперсии  $D\Psi_3$  выражается как

$$D\Psi_3 = \frac{\gamma}{2} (F_{11}F_{22} + F_{12}^2), \quad (50)$$

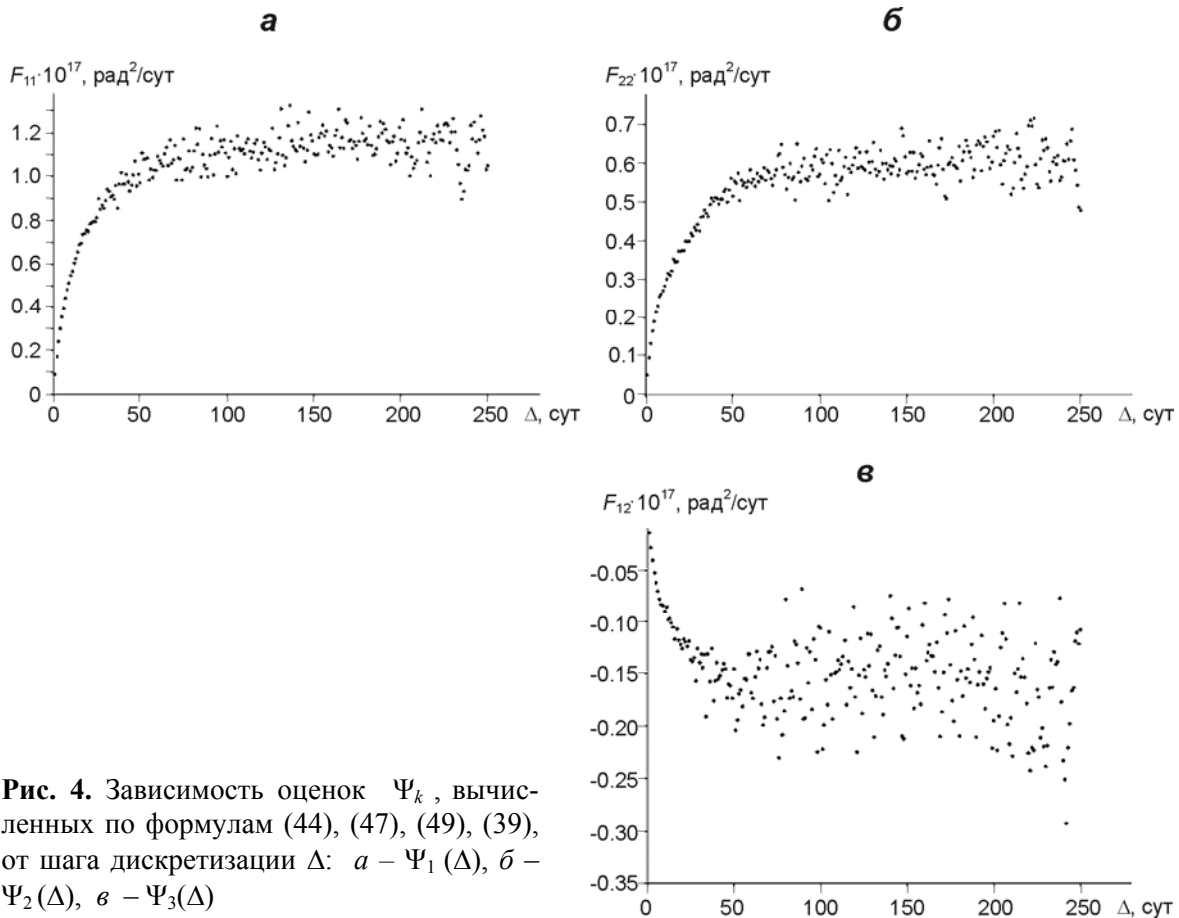
где множитель  $\gamma$  определен формулой (46).

Для парных корреляций имеют место три формулы:

$$K(\Psi_{11}, \Psi_{22}) = \gamma F_{12}^2; \quad K(\Psi_{11}, \Psi_{12}) = \gamma F_{11}F_{12}; \quad K(\Psi_{22}, \Psi_{12}) = \gamma F_{22}F_{12}. \quad (51)$$

Эти формулы легко вывести, опираясь на следующее вспомогательное утверждение. Пусть  $\varphi(t)$  и  $\theta(t)$  – реализации вещественного белого шума, корреляция между которыми  $M(\varphi(t_1)\theta(t_2)) = R\delta(t_2 - t_1)$ , где  $R$  – действительная константа, и пусть комплексные функции  $x(t)$  и  $y(t)$  удовлетворяют уравнениям  $\dot{x} - i\omega x = h\varphi(t)$ ,  $\dot{y} - i\omega y = s\theta(t)$ , где  $h$  и  $s$  – постоянные во времени фазовые множители, для которых  $|h|^2 = |s|^2 = 1$ . Тогда корреляция между скалярными квадратами  $K(\langle x, x \rangle, \langle y, y \rangle) = \gamma R^2$ . (Не представляющие интереса подробности нами опущены.)

На рис. 4 показано, как зависят от шага дискретизации  $\Delta$  оценки  $\Psi_k$  ( $k=1, 2, 3$ ), вычисленные по формулам (44), (47), (49), (39).



**Рис. 4.** Зависимость оценок  $\Psi_k$ , вычисленных по формулам (44), (47), (49), (39), от шага дискретизации  $\Delta$ : а –  $\Psi_1(\Delta)$ , б –  $\Psi_2(\Delta)$ , в –  $\Psi_3(\Delta)$

Функции  $\Psi_1(\Delta)$  и  $\Psi_2(\Delta)$  (рис. 4, а, б) возрастают при  $\Delta < \Delta_0 = 100$  сут; затем, при  $\Delta > \Delta_0$ , колеблются вблизи следующих значений:

$$\Psi_1^{(0)} = \Psi_1(\Delta_0) \approx 1.00 \cdot 10^{-17} \text{ рад}^2 / \text{сут}, \quad \Psi_2^{(0)} = \Psi_2(\Delta_0) \approx 0.57 \cdot 10^{-17} \text{ рад}^2 / \text{сут}. \quad (52)$$

Из (52) имеем предварительную оценку  $a_0$  для коэффициента диффузии:

$$a_0 = \Psi_1^{(0)} + \Psi_2^{(0)} \approx 1.6 \cdot 10^{-17} \text{ рад}^2 / \text{сут} \quad (53)$$

Для функции  $\Psi_3(\Delta)$  (рис. 4, в) “пороговым” является значение  $\Delta \approx 50$  сут: на отрезке 0–50 сут эта функция убывает от 0 до  $-0.15 \cdot 10^{-17}$  рад<sup>2</sup>/сут; при  $\Delta > 50$  сут, оставаясь в среднем примерно на одном уровне, она совершает колебания, амплитуда которых растет с увеличением параметра дискретизации  $\Delta$ . При  $\Delta = \Delta_0$  получаем оценку

$$\Psi_3^{(0)} = \Psi_3(\Delta_0) \approx -0.11 \cdot 10^{-17} \text{ рад}^2 / \text{сут}. \quad (54)$$

Таким образом, представленные на рис. 4 результаты не противоречат основной гипотезе, согласно которой приращения  $x_{u,v}((n+1)\Delta) - e^{i\omega\Delta}x_{u,v}(n\Delta)$  относительно математического ожидания при любых  $u, v$  (и значениях шага дискретизации  $\Delta \geq \Delta_0 = 100$  сут) попарно независимы. Следовательно, мы вправе считать, что скалярные величины  $\Psi_k$  и, более общо, вектор  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  распределены по закону, близкому к гауссовскому. Это означает, что плотность вероятности определяется по формуле  $p(\Psi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\det \mathbf{K}}} \exp - \frac{1}{2} (\Psi - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot (\Psi - \mathbf{F})$ , где  $\mathbf{F} = \mathbf{M}\Psi$  – вектор с координатами  $F_{11}, F_{22}$  и  $F_{12}$ , для которого мы будем использовать то же обозначение, что и для матрицы диффузии (8); корреляционная матрица имеет вид (см. (45), (48), (50), (51)):

$$\mathbf{K} = \gamma \begin{pmatrix} F_{11}^2 & F_{12}^2 & F_{11}F_{12} \\ F_{12}^2 & F_{22}^2 & F_{22}F_{12} \\ F_{11}F_{12} & F_{22}F_{12} & \frac{1}{2}(F_{11}F_{22} + F_{12}^2) \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Как видим, эта матрица является однородной функцией вектора  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{K}(\eta\mathbf{F}) = \eta^2 \mathbf{K}(\mathbf{F}). \quad (56)$$

Пусть  $\lambda$  – положительная константа. Обозначим через  $E_{\mathbf{F},\lambda}$  эллипсоид с центром в точке  $\mathbf{F}$ :

$$E_{\mathbf{F},\lambda} = \{\Psi \mid (\Psi - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot (\Psi - \mathbf{F}) \leq \lambda^2\}. \quad (57)$$

Вероятность  $P$  того, что  $\Psi \in E_{\mathbf{F},\lambda}$ , равна

$$P(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda \xi^2 \exp - \frac{\xi^2}{2} d\xi. \quad (58)$$

Теперь легко решить обратную задачу, т.е. имея в своем распоряжении оценку  $\Psi$  для вектора  $\mathbf{F}$ , построить “доверительное множество”  $\Phi_P$  такое, что  $\mathbf{F} \in \Phi_P$  с вероятностью  $P$ . Положим  $\lambda = \lambda(P)$  и обратим зависимость (58); очевидно, что искомая область  $\Phi_P$  состоит из точек  $\mathbf{F}$  таких, что  $\Psi \in E_{\mathbf{F},\lambda}$ .

*Замечание 4.* Если бы матрица  $\mathbf{K}$  не зависела от  $\mathbf{F}$ , область  $\Phi_P$  была бы эллипсоидом с центром в точке  $\Psi$ , тождественным всем эллипсоидам  $E_{\mathbf{F},\lambda}$ , поэтому *a priori* ясно, что при  $P \ll 1$  область  $\Phi_P$  – “слегка деформированный” эллипсоид  $E_{\Psi,\lambda}$ . В общем случае множество  $\Phi_P$  будет пространственным овалом, отличающимся от эллипсоида тем сильнее, чем ближе к единице вероятность  $P$ .

Построим границу  $\partial\Phi_P$  “доверительной области”. Пусть  $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$  – вектор, соответствующий некоторой матрице диффузии – неотрицательной матрице  $2 \times 2$ :

$$S_1 + S_2 > 0, \quad S_3^2 \leq S_1 S_2. \quad (59)$$

Найдем точки пересечения луча, исходящего из начала координат и коллинеарного вектору  $\mathbf{S}$ , с границей  $\partial\Phi_P$ . Пусть  $\eta\mathbf{S} \in \partial\Phi_P$ . Это означает, что  $\Psi \in \partial E_{\eta\mathbf{S},\lambda}$ . В силу (57) с учетом (56) имеем

$$(\Psi - \eta\mathbf{S}) \cdot \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{S}) \cdot (\Psi - \eta\mathbf{S}) = \eta^2 \lambda^2. \quad (60)$$

Рассмотрим (60) как квадратное уравнение относительно  $\eta$ . Это уравнение имеет корни, если

$$(\Psi \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{S})^2 \geq \Psi \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \Psi (\mathbf{S} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{S} - \lambda^2), \quad (61)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{S})$ . Варьируя направление вектора  $\mathbf{S}$  в пределах конуса, задаваемого условиями (59) и (61), получим поверхность  $\partial\Phi_p$ , состоящую из точек вида  $\eta_+ \mathbf{S}$  и  $\eta_- \mathbf{S}$ , где

$$\eta_{\pm} = \frac{\Psi \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{S} \pm \sqrt{(\Psi \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{S})^2 - \Psi \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \Psi (\mathbf{S} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{S} - \lambda^2)}}{\mathbf{S} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{S} - \lambda^2}.$$

Функция  $a(\mathbf{F}) = F_{11} + F_{22}$  достигает экстремума на границе области; поэтому доверительный интервал для коэффициента диффузии  $a$  будет

$$\min_{\mathbf{F} \in \partial\Phi_p} a(\mathbf{F}) \leq a \leq \max_{\mathbf{F} \in \partial\Phi_p} a(\mathbf{F}). \quad (62)$$

Заметим, что коэффициент диффузии находится внутри отрезка (62) с вероятностью большей, чем  $P$ , потому, что не все матрицы, для которых справедливы неравенства (62), принадлежат  $\Phi_p$ . По аналогичным причинам константа анизотропии  $\kappa$  и угол поворота  $\varphi$  с вероятностью, большей  $P$ , принадлежат промежуткам

$$\min_{\mathbf{F} \in \partial\Phi_p} \kappa(\mathbf{F}) \leq \kappa \leq \max_{\mathbf{F} \in \partial\Phi_p} \kappa(\mathbf{F}), \quad \min_{\mathbf{F} \in \partial\Phi_p} \varphi(\mathbf{F}) \leq \varphi \leq \max_{\mathbf{F} \in \partial\Phi_p} \varphi(\mathbf{F}),$$

где

$$\kappa(\mathbf{F}) = 1 - \frac{F_{11} + F_{22} - \sqrt{(F_{11} - F_{22})^2 + 4F_{12}^2}}{F_{11} + F_{22} + \sqrt{(F_{11} - F_{22})^2 + 4F_{12}^2}}, \quad \varphi(\mathbf{F}) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2F_{12}}{F_{22} - F_{11}}.$$

Взяв за “исходное приближение” оценку  $\Psi = (\Psi_1^{(0)}, \Psi_2^{(0)}, \Psi_3^{(0)})$  (см. (52) и (54)) и задавшись вероятностью  $P=0.92$ , получим доверительные интервалы для интенсивности нагрузки ( $a = 1.3 \cdot 10^{-17} \dots 2.2 \cdot 10^{-17}$  рад<sup>2</sup>/сут) и для параметров  $\kappa$  и  $\varphi$  –

$$\kappa = 0.06 \dots 0.65; \quad \varphi = -19^\circ \dots 44^\circ. \quad (63)$$

Как мы видим, доверительный интервал для константы анизотропии целиком лежит в положительной области, из чего следует, что нагрузка, действующая на твердую Землю со стороны океана, не изотропна с вероятностью  $>0.92$ .

Мы можем задаться вектором  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ , соответствующим значению  $\Delta > \Delta_0$ ; при этом изменится общий для всех элементов матрицы  $\mathbf{K}$  множитель  $\gamma(\Delta)$  (см. (55) и (46)). Расчеты показывают, что ширина интервала для коэффициента диффузии при увеличении  $\Delta$  растет; напротив, оценки для константы анизотропии и угла поворота иногда оказываются точнее, чем (63). Так, при  $\Delta=190$  сут имеем следующие оценки для элементов  $F_{11}$ ,  $F_{22}$  и  $F_{12}$  матрицы  $\mathbf{F}$ :

$$\Psi_1 = 1.24 \cdot 10^{-17}, \quad \Psi_2 = 0.65 \cdot 10^{-17}, \quad \Psi_3 = -0.21 \cdot 10^{-17} \text{ рад}^2/\text{сут};$$

доверительные интервалы, которым в этом случае с вероятностью  $P > 0.92$  принадлежат параметры  $a$ ,  $\kappa$  и  $\varphi$ , определяются как

$$a = 1.5 \cdot 10^{-17} \dots 2.8 \cdot 10^{-17} \text{ рад}^2/\text{сут}; \quad \kappa = 0.20 \dots 0.75, \quad \varphi = -4^\circ \dots 41^\circ.$$

### **Доля в наблюдаемом движении полюса составляющей, обусловленной воздействием океана. Модель “океан+атмосфера”**

Выше (см. с. 38–42) нами были получены оценки для всех параметров, характеризующих случайную нагрузку на твердую Землю со стороны океана, самой важной из которых является величина  $a = \operatorname{Tr}\mathbf{F}$ . Если  $\sin(\omega\Delta)/\omega\Delta \ll 1$  и  $Q \gg 1$ , то решение уравнения (1) независимо от значения константы анизотропии – изотропный процесс с коэффициентом диффузии, равным  $a$ . В этом случае не только движение полюса  $x(t)$ , но и амплитуда  $A(t) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  – марковский процесс, который при  $Q < \infty$  вполне определяет так

называемая стационарная амплитуда – математическое ожидание  $A_{st} = MA(t) \sim \sqrt{a}$  [Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012].

Итак, доля ЧДП, обусловленная воздействием океана, удовлетворительно оценивается величиной  $\sqrt{a/d}$ , где  $d$  – “интегральный” коэффициент диффузии, характеризующий движение полюса в целом:

$$d = 1.1 \cdot 10^{-16} \dots 1.8 \cdot 10^{-16} \text{ рад}^2/\text{сут} \quad (64)$$

[Цуркис, Спиридонов, 2009]. Поскольку  $a \sim 0.1d$ , то, если бы движение полюса возбуждалось исключительно океаном, амплитуда этого движения в среднем составляла бы приблизительно треть от наблюдаемой. Таким образом, океан и атмосфера вносят примерно одинаковый вклад в ЧДП [Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012].

Наконец, в рамках вероятностного подхода рассмотрим модель “океан + атмосфера”.

Пусть  $\mathbf{M}_o$  – угловой момент, действующий на Землю со стороны океана, а  $\mathbf{M}_a$  – со стороны атмосферы. Мы считаем доказанным, что эти моменты удовлетворяют основной статистической гипотезе. Обозначим через  $\mathbf{F}_o$  и  $\mathbf{F}_a$  соответствующие матрицы диффузии. Предположим, что векторы  $\mathbf{M}_o(\tau)$  и  $\mathbf{M}_a(t)$  при  $t \neq \tau$  не коррелируют. Тогда основная гипотеза справедлива и в отношении суммарного углового момента  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_o + \mathbf{M}_a$  и корреляционная матрица этой двумерной случайной величины стационарна, а характерное время автокорреляции  $\tau_{\text{cor}}$  мало по сравнению с длиной ряда наблюдений.

Пусть  $M_k$  ( $k=1, 2$ ) – компоненты вектора  $\mathbf{M}$  и функции  $f_k$  определяются формулами (4), а  $f(t)$  – случайная часть комплексной функции  $f_1(t) + if_2(t)$ . Обозначим через  $x_{o+a}$  решение уравнения (12) с нулевыми начальными условиями, в силу линейности которого  $x_{o+a} = x_o + x_a$ , где  $x_o$  и  $x_a$  – вычисленные ранее океаническая и атмосферная составляющие ЧДП. Если, кроме того, момент  $\mathbf{M}$  удовлетворяет высказанной гипотезе, функцию  $x_{o+a}(t)$  можно трактовать как двумерный нормальный марковский процесс, который полностью определяется матрицей диффузии  $\mathbf{F}_{o+a}$ . Оценим след этой матрицы  $a_{o+a}$  (т.е. коэффициент диффузии в модели “океан + атмосфера”), используя формулу, аналогичную (16):

$$a_{o+a} \approx \langle x_{o+a}, x_{o+a} \rangle, \quad (65)$$

результаты вычислений по которой при  $\Delta=0-250$  сут представлены на рис. 5. Можно видеть, что при  $\Delta < 50$  сут величина  $\langle x_{o+a}, x_{o+a} \rangle$  имеет явно выраженную тенденцию к возрастанию; при  $\Delta=50$  сут достигает значения  $\langle x_{o+a}, x_{o+a} \rangle = 3.74 \cdot 10^{-17}$  рад<sup>2</sup>/сут и в дальнейшем совершает хаотические колебания, оставаясь внутри достаточно узкого коридора.

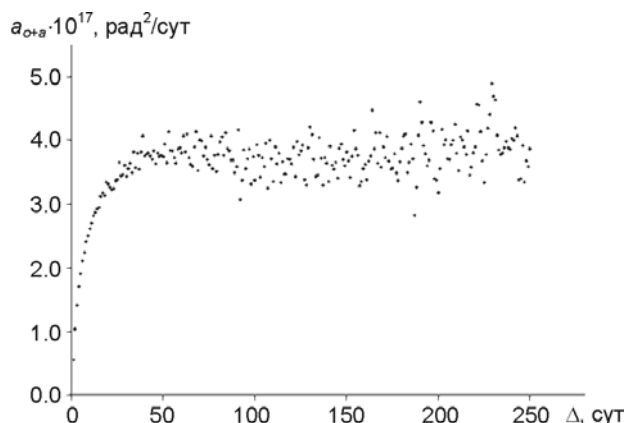


Рис. 5. Коэффициент диффузии в модели “океан+атмосфера”,  $\Delta=0-250$  сут

Итак, при достаточно больших значениях  $\Delta$  мы можем считать последовательность  $x_{o+a}(n\Delta)$  марковской. “Пороговое” значение шага дискретизации –  $\Delta=50$  сут и, следовательно, в модели “океан + атмосфера” время корреляции  $\tau_{\text{cor}} < 50$  сут.

Из сказанного вытекает, что при  $\Delta > 50$  сут величина  $\langle x_{o+a}, x_{o+a} \rangle$  распределена по нормальному закону. Дисперсия  $D\langle x_{o+a}, x_{o+a} \rangle = \frac{\Delta}{T} (a_{o+a}^2 + b_{o+a}^2 \sin^2 \omega\Delta / \omega^2 \Delta^2)$ , где  $b_{o+a}$  – разность собственных чисел матрицы  $\mathbf{F}_{o+a}$ .

Имея в виду приближенную оценку ширины доверительного интервала, примем, что процесс “почти изотропный” и слагаемым  $b_{o+a}^2 \sin^2 \omega\Delta / \omega^2 \Delta^2$  можно пренебречь, т.е.

$$D\langle x_{o+a}, x_{o+a} \rangle = \frac{\Delta}{T} a_{o+a}^2. \quad (66)$$

Оценка (65) является несмещенной, следовательно, с вероятностью 0.95

$$a_{o+a} - 2\sqrt{D\langle x_{o+a}, x_{o+a} \rangle} < \langle x_{o+a}, x_{o+a} \rangle < a_{o+a} + 2\sqrt{D\langle x_{o+a}, x_{o+a} \rangle};$$

С учетом (66) отсюда следует, что

$$\frac{\langle x_{o+a}, x_{o+a} \rangle}{1 + 2\sqrt{\Delta/T}} < a_{o+a} < \frac{\langle x_{o+a}, x_{o+a} \rangle}{1 - 2\sqrt{\Delta/T}}.$$

Задавшись значением  $\Delta=50$  сут, получим оценку для суммарного коэффициента диффузии в модели “океан + атмосфера”:

$$a_{o+a} = 3.2 \cdot 10^{-17} \dots 4.3 \cdot 10^{-17} \text{ рад}^2/\text{сут}. \quad (67)$$

Обратим внимание на то, что  $a_{o+a} \approx a_o + a_a$ , где  $a_o$  и  $a_a$  – коэффициенты диффузии океанической и атмосферной составляющих ЧДП. Оказывается, что аналогичное соотношение справедливо и для матриц:  $\mathbf{F}_{o+a} \approx \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_a$ . Метод, позволяющий оценить матрицы  $\mathbf{F}_a$  и  $\mathbf{F}_{o+a}$ , изложен выше (см. с. 38–42); там же даны оценки элементов матрицы  $\mathbf{F}_o$ . Мы приходим, таким образом, к выводу, что угловые моменты, обусловленные воздействием океана и атмосферы, статистически независимы.

Из (64) и (67) имеем  $a_{o+a}/d \approx 1/4$ ; это означает, что в отсутствие других (кроме океанического и атмосферного) механизмов возбуждения ЧДП амплитуда движения полюса составляла бы в среднем  $\sqrt{a_{o+a}/d} \approx 1/2$  от наблюдаемой. С другой стороны, если из суммарного углового момента, действующего на ось вращения Земли, вычесть  $\mathbf{M}_o(t)$  и  $\mathbf{M}_a(t)$ , математическое ожидание величины  $A(t)$  уменьшится незначительно – на 13 %. Это объясняется тем, что средняя амплитуда зависит от коэффициента диффузии не линейно, а по закону квадратного корня.

### Спектральная проверка основной гипотезы

Из тождества (21), в частности, следует, что интенсивность нагрузки  $f(t)$  можно оценить, зная спектр Винера – Лиувилля  $X(\sigma)$  марковского процесса  $x(t)$ . В знании полного спектра нет необходимости; достаточно иметь его фрагмент, тем более короткий, чем больше длина ряда наблюдений  $T$ .

В самом деле, рассмотрим статистику  $\int_{\alpha}^{\beta} |X|^2 d\sigma / (\beta - \alpha)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – частоты, при-

надлежащие интервалу  $[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$ . Математическое ожидание этой случайной величины в силу (20), (17) и (18) равно  $a = \text{Tr}\mathbf{F}$ , а ее дисперсия  $D$  при  $T \rightarrow \infty$  стремится к нулю,



поскольку  $D \leq \frac{8\pi^2 a^2}{\eta^2 T \Delta}$ , где  $\eta = \beta - \alpha$  – ширина “спектрального окна” [Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012]. Таким образом, оценка для интенсивности нагрузки

$$a \approx \frac{1}{\eta} \int_{\alpha}^{\beta} |X|^2 d\sigma \quad (68)$$

является состоятельной и несмещенной; на этом основан спектральный подход к проверке гипотезы (7).

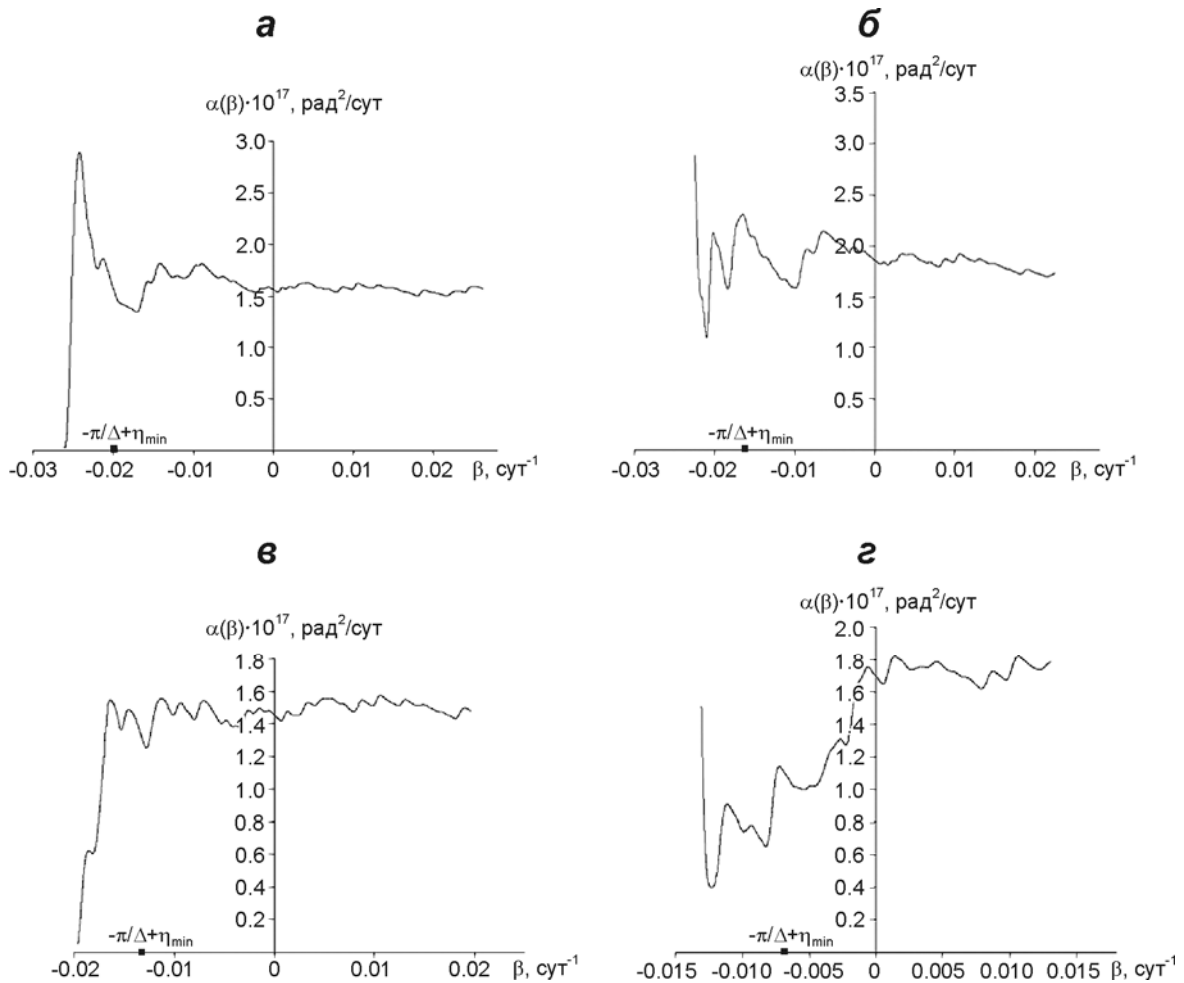
Разумеется, при слишком малых значениях  $\eta$  пользоваться формулой (68) нельзя. Условие, необходимое для того, чтобы эта формула давала результаты, близкие к истинному значению коэффициента диффузии, гласит:

$$\eta \geq \eta_{\min},$$

где  $\eta_{\min}$  – минимальная ширина, определяемая соотношением

$$\frac{\Delta}{\eta_{\min} T} \left( \int_0^{\eta_{\min}} \int_0^{\eta_{\min}} \left( \frac{\sin(\sigma - \lambda) T / 2}{\sin(\sigma - \lambda) \Delta / 2} \right)^2 d\sigma d\lambda \right)^{1/2} = 1/3.$$

[Цуркис, Кучай, Спиридонов, 2012]. Можно показать, что при условии  $T/\Delta \gg 1$  величина  $\eta_{\min}$  слабо зависит от параметра  $\Delta$  и равна  $\eta_{\min} \approx 18\pi/T$ ; при значении  $T=8120$  сут получим  $\eta_{\min} \approx 7.0 \cdot 10^{-3}$  сут $^{-1}$ .



**Рис. 6.** Графики  $\alpha(\beta)$  для разных значений шага дискретизации  $\Delta$ : а –  $\Delta=120$  сут; б –  $\Delta=140$  сут; в –  $\Delta=160$  сут; г –  $\Delta=240$  сут

Пусть  $X(\sigma)$  – спектр Винера – Лиувилля ранее вычисленной случайной составляющей океанической компоненты движения полюса. Зафиксируем нижнюю границу интервала, по которому идет интегрирование в (68), положив  $\alpha = -\pi/\Delta$ , и рассмотрим оценку (68) как функцию верхнего предела интегрирования  $\beta$ :

$$a(\beta) = \frac{1}{\beta + \pi/\Delta} \int_{-\pi/\Delta}^{\beta} |X|^2 d\sigma. \quad (69)$$

Если гипотеза (7) справедлива, зависимость (69) должна содержать горизонтальный участок “на высоте”  $\approx 1.6 \cdot 10^{-17}$  рад<sup>2</sup>/сут, расположенный правее точки  $\beta = -\pi/\Delta + \eta_{\min}$  (см. предварительную оценку (53)).

В качестве примера на рис. 6 (с. 82) представлены графики  $a(\beta)$ , соответствующие разным значениям шага дискретизации:  $\Delta = 120, 140, 160$  и  $240$  сут. Можно видеть, что на графиках действительно присутствует или явно выраженный “участок насыщения” (рис. 6, а, в), или, во всяком случае, “намеки на плато” (рис. 6, б, г).

Таким образом, результаты, полученные с помощью спектрального анализа, как минимум, не противоречат гипотезе (7).

### Результаты

Приведено корректное решение задачи о разделении марковского процесса – решения уравнения Лиувилля – и детерминированного сигнала, представляющего собой конечную сумму гармоник с известными частотами.

Показано, что возмущение, действующее на твердую Землю со стороны океана, можно интерпретировать как стационарный анизотропный случайный процесс с характерным временем автокорреляции  $\tau_{\text{cor}} < \Delta_0 = 100$  сут. Обусловленная этим возмущением компонента ЧДП представляет собой диффузионный марковский процесс с дискретным временем (шаг дискретизации  $\Delta > \Delta_0$ ). Построены доверительные интервалы для коэффициента диффузии  $a$ , константы анизотропии  $k$  и угла  $\varphi$  между собственными векторами матрицы диффузии и осями исходной системы координат.

В рамках вероятностного подхода рассмотрена модель “океан + атмосфера”.

Получена оценка доли океанической составляющей ЧДП. Дано сравнение вкладов атмосферы и океана в возбуждение ЧДП. Показано, что моменты, действующие со стороны атмосферы и океана, статистически независимы и их “совместных усилий” недостаточно для возбуждения наблюдаемого движения полюса – модель “океан + атмосфера” объясняет  $\approx 50\%$  амплитуды ЧДП.

### Литература

- Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г.* Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 4. С.13–17.
- Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
- Манк У., Макдональд Г.* Вращение Земли. М.: Мир, 1964. 384 с.
- Цуркис И.Я., Спиридонов Е.А.* О применимости аппарата марковских процессов к описанию чандлеровского движения полюса // Физика Земли. 2009. № 4. С.3–16.
- Цуркис И.Я., Кучай М.С., Спиридонов Е.А.* Вероятностный анализ данных о моменте импульса атмосферы за период с 1980 по 2003 гг. // Физика Земли. 2012. № 4. С.57–71.
- Barnes R., Hide R., White A., Wilson C.* Atmospheric angular momentum fluctuations, length-of-day changes and polar motion // Proc. R. Soc. London. Ser. A, 1983, V.387, N 1792, P.31–73.
- Gross R.* The excitation of the Chandler wobble // Geophys. Res. Let. 2000. V. 27, N 15. P.2329–2332.

Gross R., Fukumori I., Menemenlis D. Atmospheric and oceanic excitation of the Earth's wobbles during 1980–2000 // J. Geophys. Res., 2003, V. 108(B8), 2370, doi:10.1029/2002JB002143J. Geophys. Res., 2003, V. 108(B8)

*Сведения об авторах*

**ЦУРКИС Илья Яковлевич** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: 8 (499) 254-53-30. E-mail: tsurkis@ifz.ru

**КУЧАЙ Марк Соломонович** – старший инженер, Геофизическая служба РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: 8 (499) 254-99-50. E-mail: kuchay@ifz.ru

## THE PROBOBALISTIC ANALYSIS OF THE OCEAN ANGULAR MOMENTUM DATA WERE OBTAINED FROM 01.01.1980 – 27.03.2003

I.Ya. Tsurkis<sup>1</sup>, M.S. Kuchay<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>2</sup> *Geophysical Survey of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**Abstract.** The approach based on the calculation of the Wiener – Loiville spectrum of two-dimensional signal is used. The temporal rows of perturbation functions of the ocean obtained by the International Earth Rotation Service from 01.01.1980 to 27.03.2003 (IERS, <http://www.iers.org>) are analyzed. It is shown, that one can interpret the oceanic perturbation as a stationary anisotropic random process characterized by the correlation time  $\tau_{\text{cor}} < 100$  day. The share of Chandler Wobble, enforced by this perturbation is appreciated. The atmospheric and oceanic deposits in the Chandler Wobble initiation are compared.

**Keywords:** polar motion, Wiener – Loiville scalar product and spectrum, anisotropic Markov process, constant of anisotropy.